OSCILACIONES CAÓTICAS

La evolución temporal irregular e impredecible de un sistema se denomina *caos*. Este tipo de comportamiento se puede observar en osciladores mecánicos, en reacciones químicas, en sistemas biológicos, etc. La característica principal de este comportamiento es que el sistema no repite su comportamiento pasado.

Un sistema que presenta un comportamiento caótico se distingue porque si se lo hace partir de dos condiciones iniciales levemente diferentes, las trayectorias que sigue el sistema en ambos casos se separan exponencialmente en el tiempo. Este fenómeno, que aparece solamente cuando las ecuaciones que gobiernan el sistema son no lineales, se conoce como la sensibilidad a las condiciones iniciales. El matemático francés Poincaré (1854 – 1912), fue el primero que reconoció este fenómeno y lo ha descrito de la siguiente manera: " ... *puede ocurrir que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan diferencias muy grandes en el fenómeno final. Un pequeño error en el comienzo produce un error enorme al final. La predicción resulta imposible, y nos encontramos, por lo tanto, con un fenómeno fortuito*."

Si la predicción resulta imposible, es evidente que un sistema caótico se asemeja a un sistema estocástico (por ejemplo, un sistema sujeto a fuerzas externas aleatorias). Sin embargo, la fuente de la irregularidad es bastante diferente. En el caos, la irregularidad es parte de la dinámica intrínseca del sistema que no puede atribuirse a influencias externas impredecibles. De hecho, los sistemas dinámicos caóticos obedecen ecuaciones deterministas como las que se deducen de la segunda ley de Newton.

El movimiento caótico no es un fenómeno raro. Para enunciar cuáles son las condiciones necesarias que tiene que satisfacer un sistema para que su comportamiento sea caótico es conveniente describir su movimiento mediante un conjunto de ecuaciones de primer orden que se denominan habitualmente como *sistemas dinámicos*.

Sistemas dinámicos. Un sistema que se describe por medio de n variables independientes x_1, $x_{2,\dots,}\, x_n$ que satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\\ \frac{dx_2}{dt} &= F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\\ &\vdots\\ \frac{dx_n}{dt} &= F_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\end{aligned} \tag{1}$$

se denomina *sistema dinámico*.

Las ecuaciones de la mecánica que se deducen a partir de la segunda ley de Newton, son ecuaciones diferenciales de segundo orden. Sin embargo, siempre, por medio de un cambio de variables adecuado pueden escribirse como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden similar a (1).

Consideremos en particular un péndulo forzado que está descrito por medio de la ecuación

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\,sen\,\theta - bl\frac{d\theta}{dt} + F_0 \cos\omega t \tag{2}$$

donde m es la masa, g "la aceleración de la gravedad" , $-bld\theta/dt$ la fuerza disipativa viscosa y $F_0 \cos\omega_e t$, la fuerza externa sinusoidal, donde F_0 es su amplitud y ω_e su frecuencia.

Si dividimos ambos miembros de la ecuación por ml obtenemos:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2 sen\theta - \gamma\frac{dx}{dt} + f_0 \cos\omega t \tag{3}$$

donde $\omega_0^2 = g/l$, $\gamma = b/ml$ y $f_0 = F_0/ml$.

Si hacemos el cambio de variables $x1 = \theta$ y $x2 = d\theta/dt$, la ecuación (2) se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\omega_0^2 senx_1 + \gamma x_2 + f_0 \cos\omega t \end{aligned} \tag{4}$$

En la segunda ecuación aparece explícitamente la variable tiempo t. Si definimos la variable x_3 de modo que $dx_3/dt = \omega$, obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\omega_0^2 senx_1 - \gamma x_2 + f_0 \cos x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \omega \end{aligned} \tag{5}$$

Introduciendo estas tres variables se puede describir al oscilador como un sistema dinámico. Los términos $sen\, x_1$ y $\cos x_3$ son claramente no lineales.

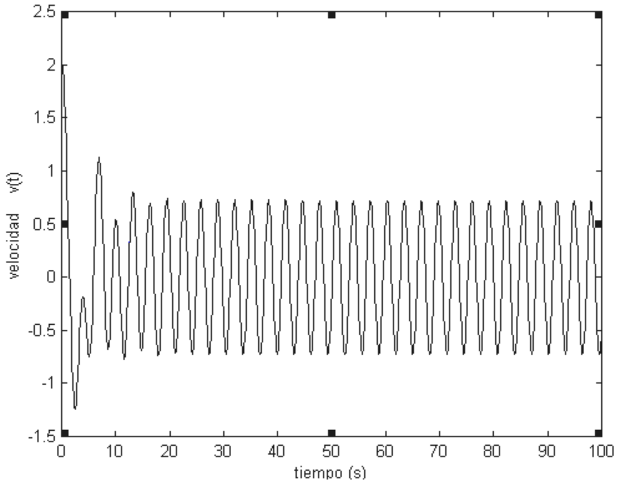

Figura 1. Solución de la ecuación diferencial (4) para los siguientes valores de los parámetros: $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.5$, $f_0 = 1.15$ y $\omega = 2$ y las condiciones iniciales: $x(0) = 0$, $dx/dt(0) = 2.0$

Condición necesaria para tener un comportamiento caótico. La condición necesaria para la existencia de un movimiento caótico son: (a) el sistema debe tener al menos tres variables independientes, y (b) las ecuaciones de movimiento deben contener al menos un término no lineal que acople algunas de las variables.

El hecho de que solamente se requieren tres variables para el caos fue sorprendente cuando se lo descubrió. La condición de no linealidad es quizás menos sorprendente. Las soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales se pueden expresar siempre como una superposición de funciones armónicas una vez que la solución de la particular haya desaparecido. El término no lineal hace inestable a estas soluciones armónicas para ciertos valores de los parámetros.

La condición de no linealidad es probablemente la causa de este desarrollo tardío del estudio de los sistemas caóticos. A pesar de que los sistemas caóticos son deterministas y se describen generalmente mediante ecuaciones de la física y de la química conocidas desde hace mucho tiempo, el desarrollo del tema es más reciente. Esto se explica porqué, con la excepción de algunas ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, las ecuaciones no lineales son difíciles o imposibles de resolver analíticamente. La resolución de las ecuaciones diferenciales no lineales requiere de métodos numéricos cuya implementación práctica requiere el uso de una computadora digital.

El movimiento caótico del oscilador que está descrito mediante el sistema de ecuaciones (4) depende de los valores de los parámetros ω_0^2, γ , f_0 y ω. Para algunos valores de estos parámetros el movimiento del oscilador es periódico, con un periodo que coincide con el de la fuerza excitadora, posiblemente con algunos armónicos o subarmónicos como se muestra en la Fig. 1, donde se muestra una solución de la ecuación diferencial (4) para los siguientes valores de los parámetros: $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.5$, $f_0 = 1.15$ y $\omega = 2$ y las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $dx/dt(0) = 2.0$.

Pero para otros valores de estos parámetros el movimiento del oscilador masa resorte es caótico. La transición entre movimiento caótico y no caótico, debido a los cambios en los parámetros, aparecen de muchas formas y dependen delicadamente de los valores de los parámetros. En la figura 2, se muestra una solución de la ecuación (4) para los siguientes valores: $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.5$, $f_0 = 1.15$ y $\omega = 2/3$ y las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $dx/dt(0) = 2.0$. *El movimiento que se observa tiene todas las apariencias para ser calificado como caótico.*

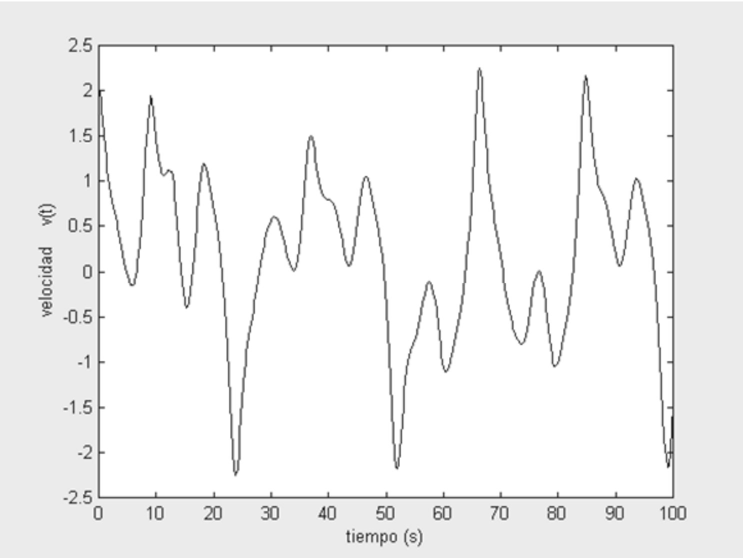

Figura 2. Solución de la ecuación diferencial (4) para los siguientes valores de los parámetros: $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.5$, $f_0 = 1.15$ y $\omega = 2/3$ y las condiciones iniciales: $x(0) = 0$, $dx/dt(0) = 2.0$.

En la introducción de esta sección decíamos que un sistema que presenta un comportamiento caótico se distingue porque si se lo hace partir de dos condiciones iniciales levemente diferentes, las trayectorias que sigue el sistema en ambos casos se separan exponencialmente en el tiempo. En la Fig. 3 se muestran dos soluciones de la ecuación diferencial (4) para los mismos valores de los parámetros del ejemplo anterior pero una con las condiciones iniciales, $x(0) = 0$, $dx/dt(0) = 2.0$ (curva continua) y la otra con las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $dx/dt(0)$

= 2.0001 (curva en líneas de puntos). Obsérvese que después de transcurrido *30 s*, las dos soluciones se comienzan a separar.

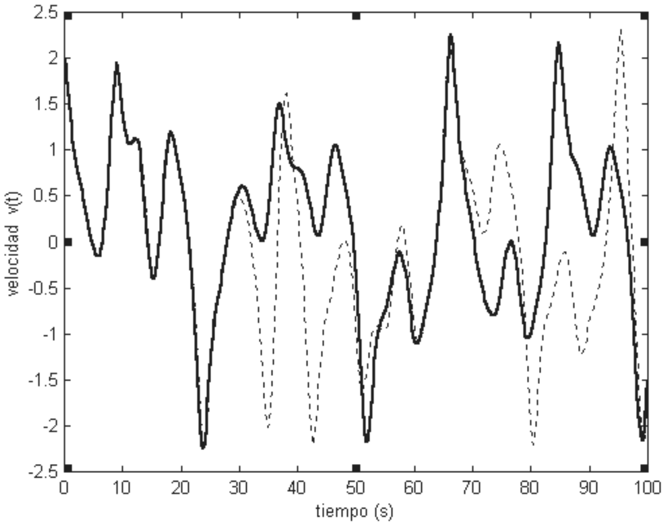

Figura 3. Soluciones de la ecuación diferencial (4) para los mismos valores de los parámetros del ejemplo anterior pero una con las condiciones iniciales, $x(0) = 0$, $dx/dt(0) = 2.0$ (curva continua) y la otra con las condiciones iniciales $x(0) = 0$, $dx/dt(0) = 2.0001$ (curva en líneas de puntos).